Exercice 1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$?
2. Quel est le rang de A ?
3. Calculer le polynôme caractéristique de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable sur les réels (i.e. comme matrice dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) ?
5. La matrice A est-elle diagonalisable sur les complexes (i.e. comme matrice dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$) ?

Justifier soigneusement chaque réponse.

Exercice 3. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes à coefficients complexes non nuls. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

1. Si P et Q ont les mêmes racines, alors ils sont linéairement dépendants (i.e. l'un des polynômes est multiple de l'autre).
2. Le degré de $P - Q$ est au plus égal au maximum des degrés de P et de Q.
3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors le polynôme $(X - a)$ divise $P - P(a)$.
4. Le polynôme $X^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. On considère les polynômes $P = 2X^5 + X^3 - 2X^2 + X - 3$, $Q_1 = X^2 - 2X + 2$ et $Q_2 = 2X^3 - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q_1 et le reste de la division euclidienne de P par Q_2.
2. Évaluer P sur chacune des racines de Q_2.

Exercice 5.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Définissons $P = (X - a)(X - \overline{a}) \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de Q, alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z}$.

3. Déterminer tous les polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$.

(Rappelons qu'un polynôme est *unitaire* si son coefficients dominant est 1 et il est *irréductible* s'il n'admet pas de factorisation non triviale, i.e. si pour toute factorisation $P = Q_1\,Q_2$, on a que l'un des polynômes Q_1 ou Q_2 est constant).

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(V)$ deux endomorphismes de l'espace vectoriel V. Montrer que, si f et g ne commutent pas (c'est-à-dire $f \circ g \neq g \circ f$), alors f et g sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}(V)$.
2. Soit $f \in \mathrm{GL}(V)$, prouver soigneusement que les valeurs propres de l'inverse de f sont les inverses des valeurs propres de f, avec les mêmes multiplicités géométriques.

Exercice 7. Soit f et g deux endomorphismes de V qui commutent (i.e $f \circ g = g \circ f$).

1. Montrer que le noyau et l'image de f sont invariants par g.
2. Montrer que les espaces propres de f sont invariants par g.

(On rappelle qu'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est *invariant* par rapport à un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$ si $f(W) \subset W$, i.e. $f(w) \in W$ pour tout $w \in W$).

Exercice 8. Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $f : \mathbb{K}^6 \to \mathbb{K}^6$ un application linéaire. On suppose que le polynôme caractéristique de f est égal à

$$\chi_f = (X^3 + \alpha X^2 + X) \cdot (X^3 - 1).$$

Trouver le rang de f. Est-ce que la réponse dépend de α ?

Exercice 9. 1) Calculer la multiplicité géométrique de la valeur propre α pour les trois matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où α est un élément non nul du corps $\mathbb{K}$.

2) En déduire lesquelles de ces matrices sont diagonalisables.

3) Décider ensuite pour chaque cas si A_i et A_j sont semblables.

Exercice 10. On considère une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ de taille 2×2 à coefficients dans un corps quelconque. On note $\chi_A = \det(A - X\,\mathrm{I}_2) \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme caractéristique et $B = \mathrm{Cof}(A)^\top$.

1. Montrer que pour toute matrice $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ on a $\chi_A(X) = X^2 - (A+B)X + BA$.
2. Montrer ensuite que $\chi_A(X) = (X - B)(X - A)$ si et seulement si X commute avec A.
3. En déduire une preuve en une ligne du théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices 2×2.

Remarque 1. La démonstration du théorème de Cayley-Hamilton donnée dans le §9.6.2 peut être vue comme une généralisation de cet argument aux matrices de taille quelconque.